

**Тематическая диагностическая работа по теории вероятностей и статистике для учащихся 10 классов**

**Демонстрационный вариант**

*Для заданий 1–4 запишите только ответ. Для заданий 5–7 запишите полное решение и ответ.*

- 1** В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет хотя бы один раз.
- 2** На семинар приехали 3 учёных из Индонезии, 3 из Камбоджи, 4 из Чили и еще 10 учёных из стран Европы. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что восьмым окажется доклад учёного из Индонезии.
- 3** В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Обслуживание автоматов происходит по вечерам после закрытия центра. Известно, что вероятность события «К вечеру в первом автомате закончится кофе» равна 0,25. Такая же вероятность события «К вечеру во втором автомате закончится кофе». Вероятность того, что кофе к вечеру закончится в обоих автоматах, равна 0,15. Найдите вероятность того, что к вечеру кофе останется в обоих автоматах.
- 4** Известно, что некоторый биатлонист попадает в мишень с вероятностью 0,8. Он делает 5 выстрелов по 5 различным мишеням. Какова вероятность того, что биатлонист поразит ровно 3 мишени?
- 5** В таблице дана численность населения городов-миллионеров России (по данным 2014 года).

	Город	Численность (млн чел.)		Город	Численность (млн чел.)
1	Москва	12,108	9	Омск	1,166
2	Санкт-Петербург	5,132	10	Ростов-на-Дону	1,110
3	Новосибирск	1,548	11	Уфа	1,104
4	Екатеринбург	1,412	12	Красноярск	1,036
5	Нижний Новгород	1,264	13	Пермь	1,026
6	Казань	1,191	14	Волгоград	1,018
7	Челябинск	1,172	15	Воронеж	1,015
8	Самара	1,169			

Средняя численность населения в этих городах — 2,165 млн человек (среднее арифметическое).

а) Найдите медиану численности населения этих городов.

б) Какая из этих величин — среднее арифметическое или медиана — лучше описывает население типичного города-миллионера России? Обоснуйте своё мнение.

**6** На фабрике керамической посуды 10 % произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80 % дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

**7** Случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы и имеют следующие распределения:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}, Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Случайная величина  $Z$  равна их сумме:  $Z = X + Y$ .

- Какие значения принимает случайная величина  $Z$ ?
- Найдите распределение случайной величины  $Z$ .
- Чему равно математическое ожидание случайной величины  $Z$ ?

### Ответы к заданиям 1–4

№ задания	Ответ
1	0,75
2	0,15
3	0,65
4	0,2048

- 5** В таблице дана численность населения городов-миллионеров России (по данным 2014 года).

№	Город	Численность (млн чел. )	№	Город	Численность (млн чел. )
1	Москва	12,108	9	Омск	1,166
2	Санкт-Петербург	5,132	10	Ростов-на-Дону	1,110
3	Новосибирск	1,548	11	Уфа	1,104
4	Екатеринбург	1,412	12	Красноярск	1,036
5	Нижний Новгород	1,264	13	Пермь	1,026
6	Казань	1,191	14	Волгоград	1,018
7	Челябинск	1,172	15	Воронеж	1,015
8	Самара	1,169			

Средняя численность населения в этих городах — 2,165 млн человек (среднее арифметическое).

а) Найдите медиану численности населения этих городов.

б) Какая из этих величин — среднее арифметическое или медиана — лучше описывает население типичного города-миллионера России? Обоснуйте своё мнение.

**Решение.** а) Расположим 15 чисел в порядке возрастания:

1,015; 1,018; 1,026; 1,036; 1,104; 1,110; 1,166; 1,169; 1,172; 1,191; 1,264; 1,412; 1,548; 5,132; 12,108.

Медианой является восьмое число в этом ряду: 1,169.

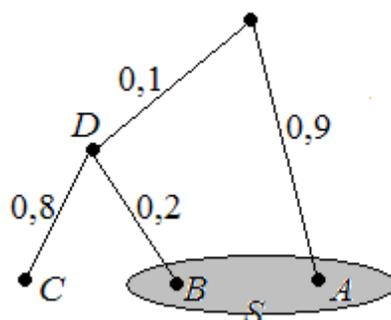
б) Типичный город-миллионер в России имеет население, несколько превышающее 1 миллион жителей. Только в двух городах — Новосибирске и Екатеринбурге — население близко к полутора миллионам. Вместе с тем, в двух крупнейших городах население более 5 миллионов — в Москве и Петербурге. Именно из-за этих двух мегаполисов среднее арифметическое оказывается значительно больше, чем население большинства городов. В России вообще нет городов с населением около 2 млн чел. Поэтому лучше характеризует население типичного города-миллионера медиана.

Содержание критерия	Баллы
Найдена медиана, и имеется разумное рассуждение в пункте б)	2
Найдена медиана, рассуждение пункте б) неверно, отсутствует или не имеет отношения к вопросу	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

**6** На фабрике керамической посуды 10 % произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80 % дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

**Решение.**

**Первый способ.** Изобразим дерево вероятностей.



Из начальной вершины графа есть переход к событию  $A$  «Тарелка не имеет дефектов» и к событию  $D$  «Тарелка имеет дефект». Соответствующие вероятности подписаны около рёбер. От события  $D$  выходят ещё два ребра: к событию  $C$  «Дефектная тарелка выявлена» и к событию  $B$  «Дефектная тарелка не выявлена». Вероятности также подписаны. События  $A$  и  $B$  вместе образуют событие  $S$  «Тарелка поступила в продажу», так как по условию в продажу поступают все тарелки без дефектов, а также дефектные тарелки, не отбракованные системой контроля качества. На рисунке событие  $S$  показано овалом, охватывающим события  $A$  и  $B$ .

Нужно найти условную вероятность события  $A$  при условии, что тарелка поступила в продажу:

$$P(A|S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)}.$$

Известно, что  $P(A) = 0,9$ . Перемножая соответствующие вероятности вдоль рёбер, получаем вероятность события  $B$ :

$$P(B) = P(D) \cdot P(B|D) = 0,1 \cdot 0,2 = 0,02.$$

$$\text{Следовательно, } P(A|S) = \frac{0,9}{0,9 + 0,02} = \frac{45}{46} \approx 0,98.$$

**Второй способ.** Сведём задачу к перечислению равновозможных исходов. Предположим для определённости, что в некоторой большой партии выпущено  $100x$  тарелок. Дефектных из них  $10x$ , а качественных  $90x$ . Из  $10x$  дефектных тарелок в продажу не попадают  $0,8 \cdot 10x = 8x$  тарелок. Таким образом, всего в продажу поступит  $N = 100x - 8x = 92x$  тарелок, а событию  $A$  «Купленная тарелка не имеет дефектов» благоприятствуют  $N(A) = 90x$  из них. Поскольку тарелки при случайном выборе можно рассматривать как равновозможные исходы, получаем искомую вероятность:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{90x}{92x} = \frac{45}{46} \approx 0,98.$$

**Ответ:** 0,98.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	1

**7** Случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы и имеют следующие распределения:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}, Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Случайная величина  $Z$  равна их сумме:  $Z = X + Y$ .

- Какие значения принимает случайная величина  $Z$ ?
- Найдите распределение случайной величины  $Z$ .
- Чему равно математическое ожидание случайной величины  $Z$ ?

**Решение.**

**Первый способ.** а) По условию величины  $X$  и  $Y$  независимы. Поэтому значение одной не влияет на вероятность появления любого возможного значения второй величины. Следовательно, сумма  $Z = X + Y$  может принимать значения

$$1 - 1 = 0, 1 + 0 = 1, 2 - 1 = 1, 2 + 0 = 2, 3 - 1 = 2 \text{ и } 3 + 0 = 3.$$

Повторяющиеся значения запишем один раз. Получаем возможные значения: 0, 1, 2 и 3.

б) В силу независимости вероятность каждой пары  $X = a, Y = b$  равна произведению соответствующих вероятностей. Поэтому

$$P(Z = 0) = P(X = 1, Y = -1) = P(X = 1) \cdot P(Y = -1) = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06.$$

Значение  $Z = 1$  получается двумя разными способами:

$$\begin{aligned} P(Z = 1) &= P(X = 1, Y = 0) + P(X = 2, Y = -1) = \\ &= P(X = 1) \cdot P(Y = 0) + P(X = 2) \cdot P(Y = -1) = 0,3 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,2 = 0,32. \end{aligned}$$

Дальше аналогично:

$$P(Z = 2) = 0,4 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,2 = 0,38 \text{ и } P(Z = 3) = 0,3 \cdot 0,8 = 0,24.$$

Для самопроверки можно найти сумму полученных вероятностей. Она должна равняться единице:  $0,06 + 0,32 + 0,38 + 0,24 = 1$ .

Получаем распределение:

$$Z \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,06 & 0,32 & 0,38 & 0,24 \end{pmatrix}.$$

**Второй способ.** Пункты а) и б) можно выполнить одновременно. Для этого нужно записать таблицу распределения суммы  $Z = X + Y$ , не объединяя одинаковые значения, а учитывая их по отдельности:

$$\begin{aligned} Z \sim \begin{pmatrix} 1-1 & 1+0 & 2-1 & 2+0 & 3-1 & 3+0 \\ 0,3 \cdot 0,2 & 0,3 \cdot 0,8 & 0,4 \cdot 0,2 & 0,4 \cdot 0,8 & 0,3 \cdot 0,2 & 0,3 \cdot 0,8 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0,06 & 0,24 & 0,08 & 0,32 & 0,06 & 0,24 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь осталось отождествить одинаковые значения, сложив соответствующие вероятности:

$$Z \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,06 & 0,32 & 0,38 & 0,24 \end{pmatrix}.$$

в) **Первый способ.** Найдем  $EZ$  по формуле, зная распределение:

$$EZ = 0 \cdot 0,06 + 1 \cdot 0,32 + 2 \cdot 0,38 + 3 \cdot 0,24 = 0,32 + 0,76 + 0,72 = 1,8.$$

**Второй способ.** Найдем  $EZ$  как сумму математических ожиданий:

$$EZ = E(X + Y) = EX + EY = 2 - 0,2 = 1,8.$$

(Значение  $EX = 2$  можно либо вычислить непосредственно, либо получить из симметричности распределения случайной величины  $X$ ).

**Ответ:** а) 0, 1, 2, 3; б)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,06 & 0,32 & 0,38 & 0,24 \end{pmatrix}$ ; в) 1,8.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы во всех трёх пунктах а), б) и в)	3
Верно решены два из трёх пунктов а), б) и в)	2
Верно решён только один из пунктов а), б) или в)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3